|  |  |
| --- | --- |
|  | D:\Dokumen Mocher\desktop\logo UMB.jpg |
|  | **MODUL PERKULIAHAN** |
|  |  |
|  | **INKLUSI EKSLUSI HIMPUNAN**   * + Definisi pada teori himpunan   + Prinsip inklusi-ekslusi. |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |  |  | |  | |  |
|  | **Fakultas** | | **Program Studi** | **Tatap Muka** | **Kode MK** | | **Disusun Oleh** | |  |
|  | Ilmu Komputer | | Sistem Informasi | **02** | **87004** | | Drs. Sapto Prayogo. M.Kom | |  |
| **Abstract** | | | | **Kompetensi** | |
|  | | | |  | |
| Dalam matematika prinsip Inklusi dan Eksklusi  merupakan perluasan ide dalam Diagram Venn beserta operasi irisan dan gabungan. | | | | Mahasiswa mampu memahami prinsip inklusi – eklusi dan definisi pada teori himpunan | |

1. Prinsip Inklusi – eklusi.

Operasi penggabungan dua buah himpunan akan menghasilkan himpunan baru yang anggotanya berasal dari kedua himpunan tersebut. Pada operasi tersebut mungkin saja ada anggota himpunan yang sama pada kedua himpunan pembentuk himpunan baru tersebut. Misal jika A adalah himpunan bilangan prima yang lebih kecil dari 10 dan B himpunan bilangan ganjil kurang dari sepuluh. Maka ada bilangan {3,5,7} yang menjadi anggota di A dan di B. Pada operasi gabungan dua himpunan, banyaknya anggota himpunan baru yang terbentuk akan ada dua element himpuna {3,5,7} yang berasal dari A dan B. Elemen ini merupakan elemen bersama antara A dan B yang dalam himpuna dapat ditentukan sebagai operasi irisan A∩ B. Sehingga untuk kasus dimana ada elemen bersama antara A dan B, maka banyaknya anggota himpunan baru tersebut seharusnya jumlah elemen penggabungan dikurang jumlah elemen bersama. Secara himpunan dapat dituliskan sebagai berikut.

| A U B | = |A | + |B| - |A ∩ B |

Prinsip ini dikenal dengan nama prinsip inklusi – eklusi.

Misalkan A dan B himpunan berhingga yang saling lepas maka,

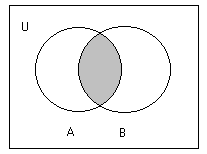


| A U B | = |A | + |B| - | A ∩ B |

Teorema

Misalkan A dan B himpunan maka A U B berhingga dan

| A U B | = |A | + |B| - | A ∩ B |



Atau dengan menggunakan operasi beda setangkup jumlah elemen himpunan baru tersebut dapat ditentukan dengan operasi berikut.

| A ⊕ B | = |A | + |B| - | A ∩ B |

Contoh

Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

*A* = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

*B* = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

*A*∩*B* = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Yang ditanyakan adalah ⏐*A*∪*B*⏐.

⏐*A*⏐ = ⎣100/3⎦ = 33,

⏐*B*⏐ = ⎣100/5⎦ = 20,

⏐*A*∩*B*⏐ = ⎣100/15⎦ = 6

⏐*A*∪*B*⏐ = ⏐*A*⏐ + ⏐*B*⏐ – ⏐*A*∩*B*⏐ = 33 + 20 – 6 = 47

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

prinsip inklusi-eklusi pada dua himpunan dapat dikembangkan untuk lebih dari dua himpunan.

Contoh :

Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

Penyelesaian:

Diketahui:

⎥*U*⎥ = 500

⎥*A*⎥ = ⎣600/4⎦ – ⎣100/4⎦ = 150 – 25 = 125

⎥*B*⎥ = ⎣600/5⎦ – ⎣100/5⎦ = 120 – 20 = 100

⎥*A* ∩*B*⎥ = ⎣600/20⎦ – ⎣100/20⎦ = 30 – 5 = 25

yang ditanyakan ⎥⎥ = ?

Hitung terlebih dahulu

⎥*A*⊕*B*⎥ = ⎥*A*⎥ + ⎥*B*⎥ – 2⎥*A* ∩*B*⎥ = 125 + 100 – 50 = 175

untuk mendapatkan

⎥⎥ = *U* –⎥*A*⊕*B*⎥ = 500 – 175 = 325

Teorema

Jika A,B,C merupakan himpunan berhingga maka ⏐*A*∪*B*∪ C ⏐berhingga.

⏐*A*∪*B*∪ C ⏐= ⏐*A*⏐ + ⏐*B*⏐+| C | – ⏐*A*∩*B*⏐-⏐*A*∩*C*⏐- ⏐*B*∩*C*⏐

+ ⏐*A*∩*B*∩C⏐

Untuk r buah himpunan.

Teorema

Jika A1,A2..... An adalah bilangan berhingga, maka

⏐*A*1∪*A*2∪ … ∪*Ar*⏐ = ⏐*Ai*⏐ – ⏐*Ai*∩*Aj*⏐ +

⏐*Ai*∩*Aj*∩*Ak*⏐ + … +

(-1)*r*-1⏐*A*1∩*A*2∩ … ∩*Ar*⏐

Contoh :

Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Jawab

*P* = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

*Q* = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

n (P∩Q) = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 ( yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi olek KPK / kelipatan persekutuan terkecil dari 3 dan 5 yaitu 15.

Ditanyakan n (A ∩B)???

n (A) = 100/3 = 33

n (B) = 100/5 = 20

n (A  B) = 100/15 = 6

maka n (A  B) = n (A) + n (B) – n (A  B)

= 33 + 20 -6

= 47

Jadi ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 dan 5.

1. Prinsip Inklusi dan Eksklusi Operasi penggabungan tiga buah himpunan atau lebih.

Prinsip Inklusi dan Eksklusi  merupakan perluasan ide dalam Diagram Venn beserta operasi irisan dan gabungan, namun dalam pembahasan kali ini konsep tersebut diperluas, dan diperkaya dengan ilustrasi penerapan yang bervariasi dalam matematika kombinatorik. Kita awali dengan  sebuah ilustrasi:

*Sebuah perkuliahan umum dihadiri oleh 20 mahasiswa yang memiliki kegemaran membaca dan 30 mahasiswa yang memiliki kegemaran menulis. Berapa mahasiswa di dalam perkuliahan tersebut yang memiliki kegemaran membaca atau menulis?*

Dari permasalahan ini terlihat bahwa informasi yang diketahui belum memadai. Banyaknya mahasiswa yang memiliki kegemaran membaca atau menulis hanya dapat diketahui jika banyaknya mahasiswa yang menggemari kedua kegiatan tersebut diketahui.

**Prinsip Inklusi-Eksklusi.**  
Banyaknya anggota himpunan gabungan antara himpunan A dan himpunan B merupakan jumlah banyaknya anggota dalam himpunan tersebut dikurangi banyaknya anggota di dalam irisannya. Dengan demikian,

n(A ∪ B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)

Contoh .  
Dalam sebuah program studi pendidikan matematika yang terdiri atas 350 mahasiswa, terdapat 175 mahasiswa yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial dan 225 mahasiswa yang mengambil mata kuliah analisis kompleks, dan 50 mahasiswa yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial dan analisis kompleks. Ada berapa mahasiswa di dalam perkuliahan itu jika setiap mahasiswa mengambil mata kuliah persamaan diferensial, analisis kompleks, atau kedua-duanya?

Penyelesaian:  
Misalkan A adalah banyaknya mahasiswa yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial dan B menyatakan mahasiswa yang mengambil mata kuliah analisis kompleks. Maka A B merupakan himpunan mahasiswa yang mengambil kedua mata kuliah tersebut. Banyaknya mahasiswa di dalam kelas itu yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial, analisis kompleks, atau kedua-duanya adalah

n(A ∪ B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)

= 175 + 225 – 50  
= 350

Ini berarti, terdapat 350 mahasiswa di dalam kelas yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial, analisis kompleks, atau kedua-duanya. Karena banyaknya siswa keseluruhan di dalam kelas tersebut adalah 350 mahasiswa, artinya tidak terdapat mahasiswa yang tidak memilih salah satu dari kedua konsentrasi itu.

Contoh   
Di sebuah jurusan dalam suatu perguruan tinggi terdapat 134 mahasiswa tingkat 3. Dari sekian banyak mahasiswa tersebut, 87 di antaranya mengambil mata kuliah teori graf diskrit, 73 mengambil mata kuliah matematika ekonomi, dan 29 mengambil mata kuliah teori graf dan matematika ekonomi. Berapa banyak mahasiswa yang tidak mengambil sebuah mata kuliah baik dalam teori graf maupun dalam matematika ekonomi?  
Penyelesaian:  
Untuk menentukan banyaknya mahasiswa tingkat 3 yang tidak mengambil mata kuliah teori graf ataupun matematika ekonomi, kurangilah banyaknya mahasiswa yang mengambil mata kuliah dari salah satu mata kuliah ini dari keseluruhan banyaknya mahasiswa tingkat 1.

Misalkan A merupakan himpunan semua mahasiwa tingkat 3 yang mengambil mata kuliah teori graf, dan B adalah himpunan mahasiswa yang mengambil mata kuliah matematika ekonomi.

Maka n(A)=87, n(B)=73, dan n(A ∩ B) = 29. Banyaknya mahasiswa tingkat 3 yang mengambil mata kuliah teori graf atau matematika ekonomi adalah

n(A ∪ B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)

= 87 + 73 – 29  
= 160-29  
= 131

Ini artinya terdapat sebanyak 134–131 = 3 mahasiswa tingkat 3 yang tidak mengambil mata kuliah teori graf ataupun matematika ekonomi.

Dalam bagian berikutnya akan diuraikan bagaimana cara-cara menentukan banyaknya anggota dalam gabungan antara himpunan terhingga dari sebuah himpunan. Hasil ini kemudian akan dikembangkan menjadi sebuah prinsip yang dinamakan Prinsip Inklusi-Eksklusi.  
Sebelum membicarakan gabungan dari n himpunan, dengan n sebagai bilangan bulat positif, sebuah rumusan bagi banyaknya anggota dalam gabungan 3 himpunan A, B, dan C akan diturunkan. Untuk menyusun rumus ini perlu diingat bahwa n(A)+n(B)+n(C) membilang tiap anggota tepat satu kali dari ketiga himpunan tersebut satu kali, anggota yang tepat 2 kali dari himpunan-himpunan itu adalah dua kali, dan anggota-anggota dalam 3 himpunan tersebut 3 kali. Ini diilustrasikan dalam Gambar berikut :

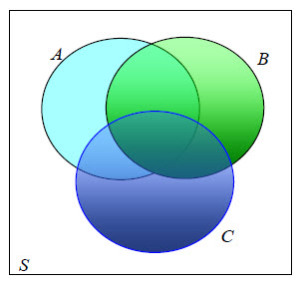
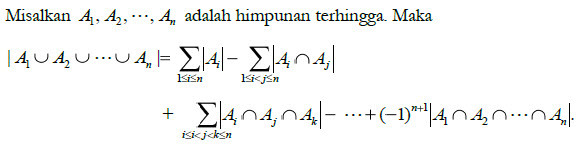
[](http://ibumei.files.wordpress.com/2011/03/ven.jpg)

Diagram Venn Tiga Himpunan

Ekspresi final ini membilang tiap anggota satu kali, apakah itu 1, 2 atau 3 dalam 3 himpunan. Jadi,

n(A ∪ B ∪ C)= n(A)+n(B)+n(C)- n(A ∩ B) – n(B ∩ C) – n(A ∩ C) + n(A ∩ B ∩ C)

**Teorema (Prinsip Inklusi-Eksklusi)**

[](http://ibumei.files.wordpress.com/2011/03/inklusi.jpg)

# Daftar Pustaka

1. Firrar Utdirartatmo, Teori Bahasa dan Otomata, Graha Ilmu, Yogyakarta, Edisi 2, 2005.
2. Jonhson, Ricard, *Discrete Mathematics*. Prentice Hall Int, New Jersey, 2001
3. Sri Kusumadewi, Hari Purnomo, Aplikasi Logika Fuzzy, Graha Ilmu, Yogyakarta, 2004.
4. Klin, George J dan Tina A. Folger, Fuzzy Sets, *Uncertainty and Information*, Prentice Hall Int, New Jersey, 1998.
5. Sumarna, Elektronika Digital, Graha Ilmu, Yogyakarta, 2006.